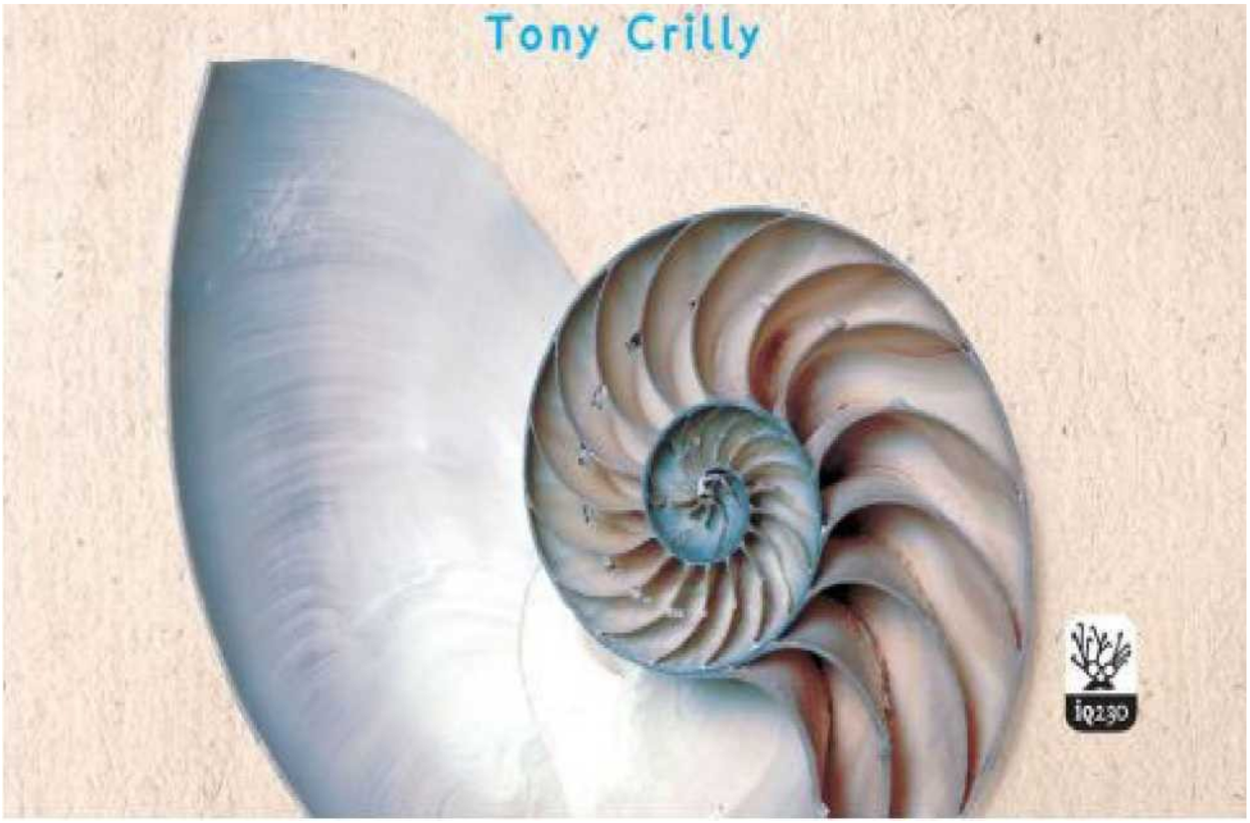
50

DE IDEI

PE CARE TREBUIE SÂ LE CUNOŞTI

MATEMATICĂ

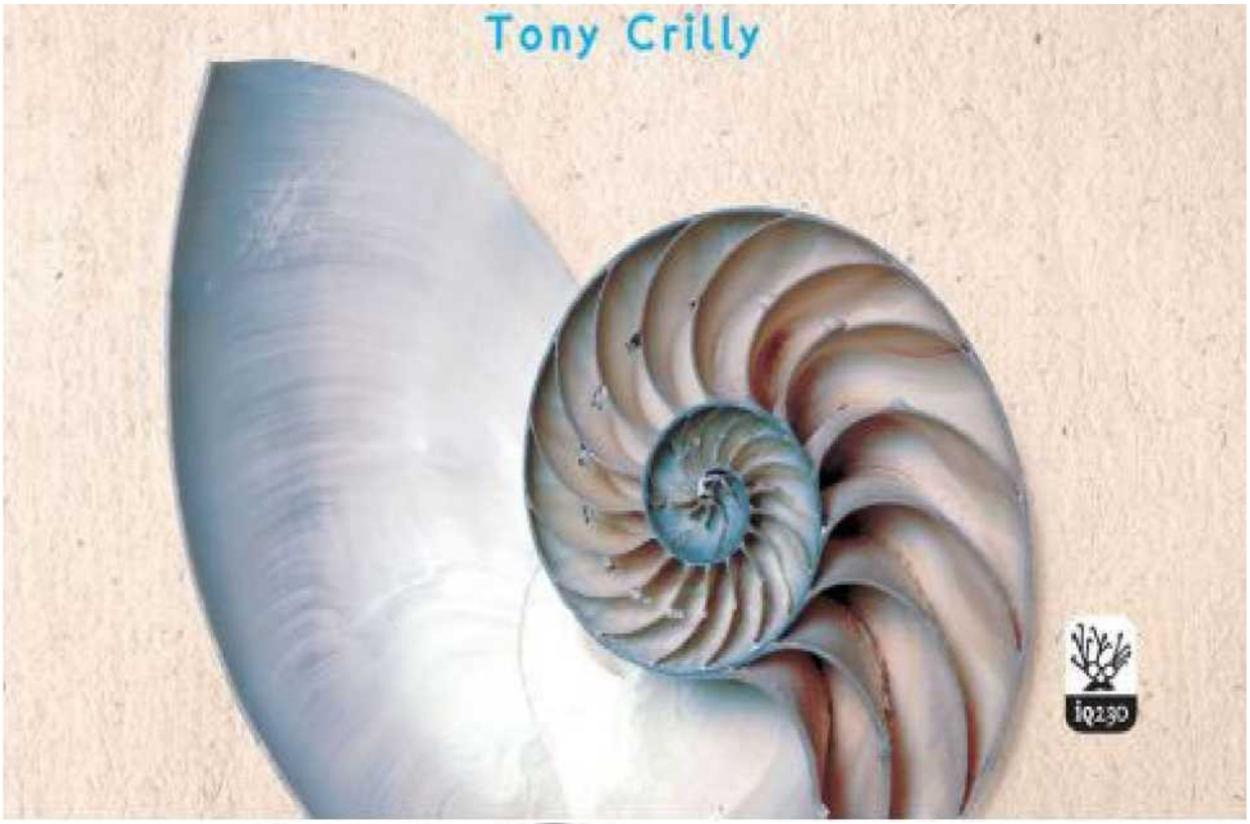

Tony Crilly

50

DE IDEI

PE CARE TREBUIE SÂ LE CUNOŞTI

MATEMATI CĂ



50
DE IDEI

PE CARE TRÉSUIE SA LE CÜNOSTÍ

MATEMATICĂ

Tony Criíly

BUCUREŞTI. 2017

Cuprins

Introducere

Dl Zero
02 Şi stemaie numeraţie
03 Fracţii
04 P ătralffii râd âci n
pătrate 05 n 06 e
07 Infinitul
OSNumerămaginare
OSNumerţirime
IGNumerţierfecle îî Numerf
ibooacci 12 Dreptunghi
udi? aur 13Triunghidbi
Pascal 14Algebra
15 Algoritm IituEiJclid
16 Logica
17 Demonstraţia
18 Mulţimi
19 Cal cutfiferenţiaţi
integral
20 Construcţii
21 Triunghiuri

22 Curte 23Topologie
24 Dimensiune
25 Fractali
26 Haos
27 Postulates ralelelar
28 Geometrid iscretă
29 Graiuri
30 Problema elorpatrucu
lori
31 Probabilitate
32Teoridui Bayes
33 Problema! lei de
naştere
34 Distribuţii
35 Curbâwrmalâ
36 Legâturiintredate
37 Genetică
38 Grupuri
38 Metrici
4D Coduri
41 Aritmeticâvansată
42Pătratemagice
43 Pătratdatine
44 Matematictanilor
45 ProblemdEetei
46Comis-voiajcrul
47Teoriijocurilor
48 Relativitate
49 Ultimâeoremă lui Ferm
at 50lpotezdtiemann

Glosar

Indice

Introducere

Matematica este un domeniu vast, pe ore nimeni nu ii poate cunoaşte în întregime. Ceea Ce poate fiecare să facă este să exploreze 51 M găsească O cale individuali. PoMMlităţiie care ni se deschid ne vru conduce în alte vremuri ţi în .iile culturi, către idei care ii preocupi de secole pe matematicieni.

Matematra «te, în acelaşi timp străveche şi modernă formată sub vaste influenje culturale ;i politice. Din India ţ: Arabia ne am dohar.di1 sistemul modern de iiumeraţir, în care se amestecă ui alte repere istorice. Maia „60” a ba bdkwuenllor ce au trăit cu două-lrei mii de ani înainte de H rufos, apa re în cultura noastră-avem fiu de secunde intr un minut şl tiu de minuîeinlr o oră, unghiul drept ace s: acum 90 de grade, nu jlA?. cum, s a adoptai în franţa revoluţionară ca o primă măsură a sistemului zecimal de măsurare.

Tr lumi urile tehnologi« din epoca modernă depind de matematică şi cu siguranţă că nu mai există nici urmă de mândrie în a anunţa că nu ai fost bun ta matematică în şcoală. Bineînţeles că matematica din. penală este altceva, predată deseori cu gândul La examene. Presiunea timpului nu ajută nici ea, pentru că matematica este un domeniu în care rapiditatea nu este n calitate. Oamenii au nevoie de timp,ca să permită ideilor să se sedimenteze. Unii dintre cei mai mari matematicieni au dovedit o lenloare chinui toare în înţelegerea conceptelor profunde din domeniu] tor.

Zăboviţi atât cât este nevoie în paginile acestei cărţi ca să descopertţl ce înseamnă cu adevărat ideile acestea, despre care poate aţi mai auzit, începând cu Zero MU CU ance ah capitol dotiţx puteţi călători intre insulele ideilor matematicii. De exemplu, puteţi să vă familiarizaţi cu Teoria Jocurilor fl api'i s j citiţi despre Pătratele magice. La fel de bine puteţi merge de la Dreptunghi urde de aur Li celebra teoremă a tul Permut.

Trăim vremuri captivante peutru matematică. Unele dintre marile ei probleme şi-au găsii recent soluţii. Dezvoltarea computerelor mo deme a ajutat Li rezolvarea unora, dar s a dovedit neputincioasă în cazul altora Problema «lor patru culori a fost rezolvată cu ajutorul unui compute r. dar ipoteza Rremann, uh imul capitol al cărţii, rămâne nerezolvatâ – de către computere sau prin alte mijloace.

Matematica es1e pentru toţL Popularitatea de care se bucură Sudoku este dovada că oamenii pot fe« matematici (fâta 5-1 jtie) ţi Bâ le jt placă La fel ca în picturi sau în muzică şi în matern alică iu existat genii, dar nu se leduce iotul : ele Veţi vedea personaje marcante care intră şi Ies în unele capitole doar ca să reapară îe> altele. Leonhard Uuler. al cărui bicentenar a fast marart în 2007. Hte un vratitoT ficcvcirt acestor pagini. Dur progresul real al matematicii este rezultatul muncii ,.crfar mulţi”. care se acumulează de a lungul secolelor. Alegerea celor SO de subiecte este una personală, dar am Încercat să păstrez un echdibru. Există subiecte banale şl subiecte avansate, de matern alică pură şi de matematică aplicată abstracte *ţi* concrete, vechi fi noi. Matematica este, insă un domeniu unitar, iar dificultatea scrierii acestei cărţi nu a stat în alegerea subiectelor, ci în renunţarea La altele. Ar fi putut să fie SuCl de idei, dar lill sunt suficiente pentru un început solid al carierei dumneavoastră în matematici.

O Zero

în lumea numereJor Mm cu paşi nesiguri, de la a vârstă fragedă. învăţăm că 1 este primut din „alfabdtil numeretur” ţi că ei introduce numerele naturale 1, 2, 3,4.5.,. Numerele naturale sunt cele care numără lucruri reale - mere, pertacale. banane, pere. Abia mai târziu învăţăm sa numărăm şi merele dintr-u cutie în care nu asie nici un măr.

Pâri j ţ. grecii din Aii.LichLtate, cate au Sdui ;J: ojjrEse insEncnaiE ţtlinţdOB ? i m jtTma.ti.cii. sau romanii, renumit! pentru realizările lor mginererli, erau lipsiţi de u modalitate efectivă de a trata suboectuJ numărului de mere dintr-o cutie goală. Ei nu au reuşii să dea jumicuLu? un nume. JiornantI aveau medul lor dea combina 1, V, K, L, C, b ţ: M. dac unde en 0? ii nn numiiau „nimicul”.

CUM A FOST ACCEPTAT ZERO?

Se crede ci folosirea unul simbol care sa desemneze JÏUTÏLZUT iţi are originea cu mn de uni în uimi Civilizaţia Maya, din ceea ce este astăzi Mexic. folosea ZEJD în deferite forme Puţin mai târziu, astronomul Ctaudrus Pfolemeu, sub influenţa babilonienilor, a folosit uri simbol înrudit CilD riodem,« să ocupe locul goi din sistemul său numeric. Ca ocupant al lacului gol, zero putea fi folosit, de exemplu, pentru a face distincţia Intre T5 ii 705]în twtaţta moderni}, în IM de a re baza pe context, cum procedau babilonienii. Acest lucru paule fi comparat cu introducerea virgulei în scriere – ambele ajută la citirea înţelesului oatrect Dar, Li fel cum virgula vine cu un set de reguli de utilizare, era nevoie de ieguL.fi pentru folosirea lui zero.

în Medul al VEi-lsa, matematicianul indian Ujahmagupta 11 ajntldeta pe zero ca pe un .jiumir“, nu doar un substituent o umpluturi a unul loc gol, fi a stabilit reguli pentru folosirea lui. Acestea erau „suma ¿i ntre un nun ir pozitiv ţi zero estţ un număr pozjtîi^ ţi „suma din t re zero fi reic este zetu“. üàndjnÈu-re la ura maidegrabi ca la un număr decât ca la un substituent. Ebahmagupto era dertut de revoluţionaj. Sistemul de r.umeraţie tnda arab, care il indudea pe zero, a fost promovai în Occident de Lecnarda din Hn – Fibanawl – în lucrarea sa *Lihsi* Ahacj (Cartea nitmârărt^, publicată pentru prima dată în 1202. Crescut în nordul Africii şi familiarizat din ţcnalâ cu aritmetica

700î.HR

Babicmie ni fokKesozeni ca subsifaiefit piTilrj lofiul ÿd din s.sterul or nurenc

620d.Hf.

EtahmagupU loioseşle IBID* erurţă regiJi pertru fobsirea .11 cua-le rurere.

630

Huliah -'j encnlc du. despre nodLi ir cnzm ntwac| cneaz3cuate nurere.

indo arabi, el a recunoscut forţa folosirii simbolului suplimentari, în combinaţie[1] cu simbolurile hinduse 1, 2, J, 4r S, fi, 7, É pi 9.

Introducerea iui zero în sistemul de numerale a pus o problemă ¿e cate ftrahnugupta s-a ocupat d-aar în trecere- cum trebuia tratat acest jntnu^x^î Ei a făcut începutul, du: recomandările lui erau vagi. Cum putea fi integrat zero în - sistemul existent al aritmeticii de o manieră mai precisă? Unele ajustări au venit imediat. Când era vorba despre adunare ţi despre înmulţire, O Funcţiona perfect, dar operaţiunile de -scădere ţi de împărţire nu se împăcau prea uşor cu „intrusul”. £ra nevoie de precizări de conţinui, pentru ca U să se ormcmzeie cu restul aritmeticii accepljle.

CUM FUNCţIOMEAZÂ ZERO?

Adunarea şi înmulţirea cu zere sunt clare şi fi a controverse – poţi adăuga fi [a 10 ca E& obţii 100, dar ne wm refen Ea”adujiaiE” în rinul mal puţin imaginativ 1J operaţiuni: numerice. Adunarea lui il la un număr lasă acel număr neschimbat, pe când înmulţirea lui 0 cu orice număr dă întotdeauna rezultatul 0. [Je exemplu, avem 7 +■ 0 – 7 şi 7 0 – 0. Scăderea este o operaţiune simplă. dar poate duce la numetf negative, 7 – 0 ■ 7 ţlD – 7 ■ -7. Împărţirea la sere rtdlcă insă dificultăţi

ne imaginăm că măsurăm o lungime cu ajutorul unei rigle. Să presupunem că rigla are 7 unităţi de lungime. Ne interesează de căte ori putem aşeza ngla noastră pe lungimea d.ilă. Dacă lungimea care trebuie măsurată este 28, răspunsul este 2£ Împărţit la 7 sau, în simboluri, 23 : 7 — 4. Ci notaţie rr.ai bună pentru a exprima, această împărţire esle ţi apoi putem face proba scriind aceasta în termeni de multiplicare, ca fiind 28 – 7x4. Cum procedăm însă cănrl avem de împărţit fi la 7? Pentru a facilita găsirea unui răspuns, să denumim rriu.tatuj a, astfel încât înmulţind pe diagonala, aceasta este echiiralert cu 0=7« a. Dacă aţa stau lucrurile, singura valoare posibilă jrenitu a este 0, pentru că. dacă rezultatul înmulţirii

1100

Bhasluii loLseşIe ó ca snibal
în .i getjrâ şi înceorcasa a-ale
cum se licreazasu acesia

1202

Fibonacofotcsea^ siirtiDiU[1] SLP „neniar Ú
iidăuydl ¿1 satemul indo arab de nun ere
f,. 9 dar nu ca pe im număr echivalent cu
aceste a

a două numere estet), alunei unul din ele trebuie să fie Ol Cu siguranţă rna este 7. apa că trebuie să fie un zera.

Aceasta nu este principala dificultate în ceea ce it prrvBţte pe zero. Punctul cntlc este împărţirea La 11 ilara încercăm să 1/atăm 7.'d la fel cum sm procedat cu *6f7*

am avea
ecuaţia

$$\frac{7}{0} = b$$

Prin înmulţire pe diagonală, 0 к b – 7 pi ajungem La nonsensul ciO ■ 7. Dacă admitem posibilitatea ca 7/0 şi fie un numii, ajungem la o confuzie numerică pu scară mare. Ieşirea dan această situaţie constă în a spune ci 7/0este nedefinit Nu este posibil să extragem un sens db i Împărţitei Iul 7 (sau a oncirul alt tiuntii care rai este aera) la zero şi, pur şi simplu, nu permilem această operaţiune. La fel cum nu este permis să plasăm o virgulă în mijlocul unul cuv.int, pentru ciü transformăm înti-un nonsens.

Matematicianul indian din secolul al XI! lea Shaslrora, căinând pe urmele Lui llrahmagupta, s a aplecat asupra împărţirii La Ü ;i a sugerat că un număr împărţit La U dă ca rezultat infinit. Ü sugestie rezonabilă, pentru că, dacă împărţirii, un număr la un număr foarte mic, rezultatul este foarte mare. De exemplu, 7 împărţit La o zecime este 70, iar împărţit ta o sutime dă rezultatul 700. Pe măsuri ce numitorul devine dan ce în ce mai truc, rezultatul devine din re în ce rnai nune. La minimul absolut, U însuşi răspunsul ar trebui să fie infinit Acest raţionament ne pune insă în situaţia de a explica un concept şi ™ i bizar – şt anume infinitul. Confruntarea cu infinitul nu este de irá; iit-fituluJ (cu riotiţia hd standard «■'■ nu м conformează. tcgullJot uzmJt alt aritmeticii;] nu este un număr rn sensul obişnuit al cuvântului.

Dacă 7/0 reprezintă □ problemă, ce SE poate face cu ţi mai bizarul Ú/0Í Dacá U.'G – c, prin înmulţire pe diagonală aj ungem ta ecuaţia 0 -0 eşila Fapluî cá Ü – Ol Aceasta nu este cine ştie ce descoperire.dar nici un nonsens nu este. De fapt, car putea fi once număr ;i nu ajungem intr-o situaţie imposibilă. Ajungem la concluzia că Ü/Ü poate fi egal cu orice; în cercurile matemjücrer.llor este denumit politicos „nedeterminat”.

După Lóate acestea, ajungem la concluzia că. atunes când este vorba despre împărţirea la zero, mai bine excludem operaţiunea din modul în care facem calculele. Aritmetica se descurcă foarte bine ţi fără ea.

LACE FOLOSEŞTE ZERO?

Pur ŞJ sirr.pliLr.u ne am putea descurca fără ü. Progresul ştiinţei a depins deeL Voi bun despre zero grade Longitudine, zero grade pe scala temperaturilor, despre energie zero şi gravitate zero. A intrat şi în limbajul non-ştiinţific, cu expresii precum ora zero sau toleranţă zero.

Totul despre nimic

Fi-jm.:! d „l.i! r̄n ■; un nunilr pi'JU'/ Mtff pOHt.vâ

Sume if.ni.T- rtnj ţi un hunftr «Bita iUâ n&oafirt

Surr i :: -tn? un ni;Tiă” pofibv ţi unii vignr.w nsţn di'omnţn Ier, r au. lincd rLimer'ţlţ ia.nl cirjnlr relultatul eite re iu

Furt: impSrţjt ia im număr ʳ<ujnl.v !::ni rejitiv I' : nţtn irro fiq ostfl rxpnrr it ::n fr::c:ţ.iE r.. /rrc i '■..т V.ittirţ ra”·ciLjt.:m r-.-.i .i IkJfflltM

D rahmagupta, d.tir.

Ar putea fi folosit inii ţi mai mult. La New tork. daci păţiţi de pe trotuarul Sth Avenue în Empue State Building. ajungeţi în magnificii] hol de intrare de la Etajul 1. Aceasta foloseşte capacitatea numerelor de a ordona, 1 pentru ₙprLmuLᴸ'₁ *2* pentru .al doilea'¹ şi tot aşa până la 102. iri Europa există ţi un Etaj dat sunt reţineri în a Lnumi astfel

Matematica r.u ar patra să funcţioneze fără zero. Acesta sr află LTI centrul conceptelor matematice rare fac sute mul de nume raţie, algebra şi geometria să furie- ţkmcu **ca** un tot În **jirul** numador, 0 **ealt** numirii! cate separă nume te Le pozitive de cele negative şi ocupă, ap&dai, o poziţie prtirtJeţJiťă. în sistemul îtcunal, îtro serveşte ca subitituent care ne permite să folosim atât numere uriaşe, căiţi unele microscopice.

De-a lungul câtorva sute de ane. zero a ajuns i-.i fie accep tat şi utilizat, devenind una dintre cele mai importante invenţii. ale omului. Matematicianul american din

secolul al XDC-lea GA JJalsted ȷ adaptat un Fragment din Kisul unej nopjj de nră, de STiakespeare, pentru a 1 descrie ca motor al prograului care iii „iluzoriului nimic nu doar un loc anume şl un nume, o imagine, un simboLci o putere utili, car ader ii li că rasei hinduse din care s a născut”.

Când a fost Introdus. 0 trebuie să f. părut ciudat, dar matematicienii au obiceiul de a se ataşa de concepte stranii care se dovedesc utile mult mai lârziu. Lchnratentur din zilele noastre îl găsim în teoria mulţimilor, unde oanceptul de mulţime înseamnă o colecţie de elemente Ir. această teone, 4 desemnează mult im ea fără nici un element, apa numita „mulţime vidă”. AEEUH idee poate sa ni -se pară audată, dar La fel ca d, este indispensabilă.

Idee de bază nimicul contează.

Sisteme denumeratie

J

Un sistem de niimeraţie este a include de i aborda conceptul de |hEât de mulţi“ Diferite civilii aţii, în diferite perioade de timp, au adoptat metode difenle. mergând de ta dementarul „unu, doi, trei, muite“ pnâ la extrem ie sofisticata notaţie zecimaiâ pozifianalS pe care o folosim astăzi.

S-umenenii şi babilonienii, care locuiau în uimi cu 4 UlJlJ de im pe teritoriu] ocupat astăzi de Şina, Iordania şi Iralc, foloseau, în practica IOT ce zi cu zi un sistem poziţional, îl numim poîlţlonâl peritn: ci paji eapnma jiumăml'[1] p-iLn potlţlrmarta urna simbol. De asrmenica.«foloseau 60 ca imitate dc bază ceea « numim astăzi un sirterr. jde luzi 60“. V^sUgiilf bazei 60 ne nrmArcrc fl acum: 60 de secunde Lntr-un minut, 60 de minute intr-o oră. Când măsurăm unghiuri, considerăm şi acum ci unghiul La centru KjrespuiultM utili cerc ire 36O\ în pefida inetrcării sistemului metuc de a-1 face de 400* (astfel tarii unghiul drept să aibă. ioc'].

Dacă strămoşii ncţln din Antichitate aveau nevoie de numere pentru scopuri practice, există dovezi câ aceste culturi primitive erau preocupate şi de matematică în sine şi că, pe lângă ocupaţiile lor practice, işi făceau timp să o studieze. Aceste explorări indudeau ceea ce am putea numi ..algebră’, precum ţi picprietiţilE figurilor geometrice.

Sistemul egiptean din secolul al XJÎl-lea LHi. folosea baza 10 cu un sistem de semne hieroglifice, Semarcabd este că egiptenii au dezvoltat un sistem pentru a opera fracţii, dar nertaţ ia poziţională zecimala pe care o folos.m astăzi vine de la babilonieni, rafinată maităruude hinduşi Avantajul este că ea poale fi Folosită pentru a exprima şi mimeze foarte mid, ţi numere foarte mari. Folosind doar numeralele indo arabe 1,1, 3,4 5, b, 7,4 ţi 9. se pot face calcule cu o oarecare uşurinţă hle convingem de aceasta aruncând □ privire la sistemul folosii dr romani. Era adecvat necesităţilor lot, insă numai bunii Lijnosrâtoii ai sistemului erau capabili sa facă pi calcule cu el.

30 000

Pepvlrtţiilr [Mirehtnrilm Furiipn fâistrrtHirtunieriape«»

2000

600

Ehbikiaienii falM^sc Pnedececwul sidensjlul rastru

SISTEMA U MER AŢI E

> flMi::lyri pţutri. ni. irţif inyţlFJrt df Htlfc MJUMU tStt
fliăut ii' Irdil

SISTEMUL ROMÁM

Simbolurile de baiâ folosite de rcmatti erau jedltf' ilX.CţJ Mj fi Jmrfiiţfle* iCKtora (Vᴘ L ţj □). Aceste simboluri erau comMnate ca sâ formeze altele. 5-a sugerat ca folosirea lm L II, IU ;L [III derivă din imapnea degetelar noastre, V din forma nij_n_i HI p:în inversarea acestuia din urmi şi unirea crier două ca şi formám X obţinem, dcuá mâini, sau 10 degete. C vine de La reniirn şi IV. de la 4tffiţ n sută, respectiv o mie în latină. Romani] foloseau, dciscmenca.

5 pentru ,o jumătate” fl un sirtecn de fracţii cu bau li.

SistHUdJ rumar. folosea oarecum o me tedo „înainte şi dupi[1]” pentru pcodu cerea simbolul doc de cure ere. nevoie, dor se pace că nu. a fest uniform adoptată. Şamanii din Antichitate preferau să scrie]]| [. forma IV fiind infiwluiâ doar rciat târziu. Combinaţia IX era folosita ŞL ea.se pase, dar un ramam care ftdea sens S-l JC ar fi înţeles S[1]/]! Vedeţi mai fui numerele de EHZJ iile siJlemidui roman, cu UTIE'E adăugiii din epoca inedievjlâ.

Sistemul de numeraţie

Impenul Roman	adăugiri irec
¿ o lumälarp	
1 unu	
V cinci	V cinc mii
X zece	X zecemii
L cincizeci	L occizeci de nia
t OEulâ	C o aUtâ de ml
D anei E-r1e	D duci 5u1e de
M orive	t-1 un idilicii

kdcsirea num erate lor romane nu este deloc u poara. De exemplu înţelesul iul MMMCCKLI 111 deme dar doar tind H introduc mint al paranteze, iar at unei [MMMJICD] (XIlîLUI) M citate ca MB+4Ö0 +40 * 4 – 3444. Dai birercau al adunaţi JAMMC JKLUJJ + CLLXCIIII. Un roman perceput în aceasta artă ar cunoaşte diferite scurtături ţi şmecherii, dai nouă ne ea te greu ij obţinem răspunsul corect facă să cdcjJârr. mai iniăi în sistemul zecimal ^1 să convertim rrzullatid ¡napas, în notaţia romană:

Adunarea

3444 t MMMCDXiJlli

4 9H ■> CCOI£I[[

-IE 33 ■ MMMDCCCXXXVZlI

înmultuoa a doud numere este mult mal dificili ţi ar putea fi chiar Imposibila în cadrul sistemului de saiă. până, ţi pentru un roma n Ca să facem înmulţirea .1444 x 994 avem nevoie de adăugirile medievale.

1200

5E rjifijiifieílc H ţţeiw -udú-JiAQ deKjiEittnpwiw 1.

1600

mfataluhlt lidimuliB Ht írttal ia J fer miit irifijtiñr uve leuMeţieni M1*Il

SISTENENUMERAŢI E

ijlitiullitea

1444 b MMMCDX1JLLL

x 3M CCCXCLEEE

-l.35C.93b MCCCLVMCMXXXVI

JlomanlJ nu aveau un simbol specific pentru zero. Dacă 1 ai fi întrebat pe un cetăţean vegetarian al Romei câte sticle de vin a băut în ziua respectivă, at fi putut să scrie]]], dat dacă îl întrebai câţi pui a mâncat, nu ar F. putut să sate 0. 7eilij;jJe sistemului roman de numtiaţle supravieţuiesc în paginaţia unor -cărţi inii fl a acesteia, totufij ţi pe pietrele de fundaţie ale dtâlnJor. Unele combinaţii nu au fost folosite niciodată de rumâni, cum ar fi MCM pentru iWu, ci au fost introduse în vremuri Le moderne, din raţiuni stilistice. Roninrii ar fi scris MIXXXJL. Al paisprezecetca rege Ludovic al Franţei, cunoscut lumii drept Ludovic nl XJU-lea. prefera să fie ţtrul ca Ludovic al XJ]]]-Lea >i a instituit regula ca toate ceusutile Lui să arate oro 4 ca fiind IEEE.

Un ceas lu durii

NUMERELE ZECIMALE ÎNTREBI

în mod natural noi Identificăm „numeieie'[1] cu numerele zecimale. Sistemul zecimal este ha barat pe zece, folosind uf rele D.1, 2, 3P 4, 5, fi-, 7, B fi 9. De fapt, aie la baza „zed” şi „unităţi', darunJlaple p:l ti absorbite în „baza 10”. Land ttJţiHn numărul 194, putem explica înţelesul lui zecimal spunând că este compus om 3 sute, 9 zeci ţi 4 unilâţi 51 putem ic: le

3M – 3 x l£0 *t 9 ** 1014 <1

Acefta piKte fi acrii fl folosind ,putefile'' lui 1D friiriQKUte fi ca «exponent![1] uu „tadidT;

194-J >: tO[1]19 Utf *4 н 1F

unde IO[3]« 10 K 10, IO[1] c io ţi admitem separai că IC * 1. în această toHTi-iă se vede ni ai dar baza zrcJmoJj a sistemului nostru uzuul di[1] numeraţie, un sistem care face adunarea şi inmulţiten destul de transparente.

AVANTAJUL ZECIMALULUI

Pan j acum neam concentiat pe reprezentarea numerelor întregi. Roate sistemul zecimal să opereze 51 cu părţi dmu-un numai. cum u fi ?73/IKJOÎ

Aceasta înseamnă

572 S 7 2
ÎDM „ 10 ’ IDO ÎOOO

hjtcjtinata jedproaJE” LuL 10,100,1000 «puteri negativi[1] aJetui 10, astfel Încât

----- ■ 5vlO ' + 7 -IC’ + Z» ier[3]
_K0

iac acesta poate fi sens ,572, unde vlrgiüu indică începutul puterilor negative ale lullO. Daci adunim ács asta laaípilmajaa în sittem acunal a lui W4, obţinem SM^ADML **adică,** pur ţi simplu, 3Í4572.

Pentru tiuiTierrle icuri, notaţia zedmalá poate fi foarte lungă, aşa că revenim, în astfel de sduaţJk la „notat La ştiintificd”. De exemplu, 1956 930 A92 punte fi scris *ca* 1.3569 ibS92 H 10' crea ce apare deseori ca I.1.99693t5!L92 x IDE'j” pe calculatoare sau computere Aici puleora 9 este ru o uriLtatc nui mtcă decât numind dt CIÎT-C al? rmminiltu. iar litera t înseamnă ..exponentul“. Uneori am putea dori sa fol o SUT. numere şi mai mari, de exemplu atunci când vorbim despre numărul de atomi de hidrogen din universul cunoscut. Acest numii a fost estimat la 1.7 * UT[1]. La fri, 1.7 x 10 „, adică putece negativă, este un număr foarte mic, dar şt el este uşor de fdosil duca recurgem Li notaţia ştiinţifică Nu im putea concepe şi ne gândim la astfel de numere reprezentând! lecusimbnlun romane.

ZEROUHk ŞI CIFRE DE UHU

Dacă baza 10 este folosită, de obicei în viaţa de zi cu zi, unele aplicaţii necesită o altă baza. Sistemul binac, care foloseşte baza 2, stă în spatele puterii computerelor moderne, frumuseţea binarului este câ orice număr poate fi exprimat folosind doar simbolurile 0 ţi t Reversul medaliei pentru această economie este ci expresiile numerice pot să fie foarte Lung:.

Cum scriem 394 în notoţie binarii Dedata aceasta hicrâmcu puterile lui 2 şi după ce facem nişte calcule, putem da expresia completă ca fiind

394-lx256 + lx 123 + 0 x64 + üx32 + 0x 16 + 1 xB + Ox 4 + 1 x 2 + 0x1

aşad ar, citmd doar cifrele unu şt zero, 994 în binar este 110061(110.

Cum expresiile binare pot fi foarte Lungi,În informatică apuc frecvent şt alte baze. Acestea sunt sistemul «Lai {baza 8; ţ: hexazecimal Raza 16|i în sistemul octal avem IWVCHE doai de simhohinLe Ű, 1, 2, 3,4. 5, 6, 7, pe când sistemul hexazecimal foloseţle ÎL simboluri, în sistemul de Ud 16, folflslm,deobíMLflil,2,3, -î, 5, Br T, H, S, A, BXD.FJ.Cum 10 corespunde literei A numărul 194 este reprezentat în hexazecimal ca 1KA. Este la fel de simplu caA£C,dar nu uitaţi că asia înseamnă *1* ?4ă în zecimali

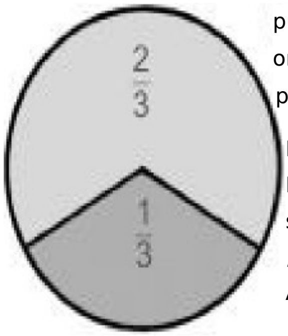
Idee de bază
să punem numerele pe hârtie.

03 Fracţi

O fracţia este un „număr fracturai'[1] - la propriu. Daca rupem un număr întreg în bucăţi. într-un mod adecvai înseamnă că folnsim fracţii. Sa luăm exemplul tradiţional, tortul, |j sâ-l tăiem în trei părţi.

Persoana care primeşte două dintre cele trei părţi ale tortului capătă o fracţie echivalentă cu '/j Ghinionistul căpătă doar *Vj.* Dacă punem laolaltă cele două bucăţi de tort, obţinem Dit iil dlnnmi întreg sau în fracţii, Vj t-²/] ■ 1, unde 1 rapreiinla prăjitura întreagă

ată u:i ah exemplu. Aţi fost probabil pun magazine în perioadele de reduceri ; i aţi ut D cămaşă atuasi la vânzare la patru cincimi din preţul original. inacert caz, fracţia este %. Am



puica s-pune ţj că preţul cămăşii este redus- cu o cincime din **aci** onginal. Aceasta **se** scrie ¹/j ţi vedem 75 + % ■ 1, unde 1 reprezinţi preţul original.

Dfractie aie întotdeaunafomi-i linul număr întreg ʟp*T un număr întreg. Numărul de sub linie poartă denumirea de ʳnLLmjtarᴸ'ʳ pentru că ne spune câte părţi formează întregul. Numărul de sus **este** „numărătorul' pcnlru că ne spune câte unilâţi fracţionare avem. Apadar, □ fracţie în rotaţia consacrată arată întotdeauna astfel:

numărător
numitor

n cazul prăjiturii, fracţia pe care ai vrea să o mănânc este %, muie numitorul este 3. ar numărătorul 2. Vj. este format din 2 unităţi fracţionare de Vj.

Putem avea ţi fracţii cum este ³V$ (numite impropriu fracţii], unde numărătorul este nai mare decât numitorul. Dacă impărţrm 14 la!, abţinem 2 ii rest 4, care poate fi scris :a numărul „mixf /A. Aceasta înseamnă numărul întreg 3 şJ fracţia „propriu-diâᴸ 'A. Cei din vechime u fi scrii V5.2. Fracţiile suni reprezentate, de obicei, inlr-o formă în **:are** numărătorul şl numitorul (numărul **„de** sus' pi **cel** .de jos'[1]) nu au divrzon iomiii u, Jc exemplu. numărătorul şL numitorul Lui ⁰/în au divrzorul comun 2, pentru că fl = 2 ■ 4 ii 1D = 2 x 3. Dacă scrum fractta = ²'ªA.5, putem „srmpLfrca” 2-unle şl astfel

1S00 i.Hr. 1650 î.Hr. tOOd.Hr.

T'iiipHc MMt f^OSite lp T gipleuh fblocMC unUţlle > (KW cţ' v>1 SlSlt^
culiurik LabikihiAne frăţie panfal Qiidli CV ffrCţll

ᴴ4D = Vi, o formă mai simplă eu aceeaşi valone. Matematicienii definesc fracţiile ordinare ca fiind raportul .1 daiâ mimererajionale Numerele laţioriale eraunumerele! pe care grecii dui AnDchftarte li puteau jniiura”.

AQUN4REA ŞtINMULŢIREA

Caracteristica destul de oudaLă a fracţiilor este ci rlr sun! mai uşor de înmulţit decât de adunat, înmulţirea numerelor întregi dă atatea bătăi de cap, tnriit: a fast nevoie de Inventarea unor modalităţi Ingenioase pentru a face asta, în cazul fTEtcpilcT, Lrisd, adunarea esîe mai dificilă şi necesită DCJiecare atenţie.

Să începem cu înmulţirea ftacţulur. Când cumperi a cămaşă ia patru cincimi din preţul original de 3O£, plăteşti preţul redus de *141.* Cele JDC ie împart în cmc! părţi de câte ti fiecare iar patru dintee aceste cinci părţi înseamnă 4 x b – 24. preţ pe care ii plăteşti pentru cămaşă.

Ulterior, descoperind ci respectivele eiinâţs nu se vând piea bine, managerul magazinului decide să scadă mai mult preţul şi anunţă câ ic vinde la ᵀ*/j* din preţul deja redus. Ducă Intri ir. magazin acum, poli şi cumpe ri cămaşa cu 12£. Aceasta inseamr.i Vi ± *⁴/s c* 30, care este egal cu 12. Ci să înmulţeşti două fracţii trebuie doar să înmulţeşti r.umitoi ii intre ei şi numărător ii intre ei:

1 4 L « **4** 4
- K – - ■ ......
2 5 2x5 10

Dacă managerul ar fi făcut cele două reduceri deodată, ar fi trebuit să anunţe că vinde cămăşile la patru zecimi din prcţiilonglnal de 3Qt. Aceasta liueaiuni·¹4j > 30ₚ adică Î2£.

Adunarea a două fracţii este cu totul altceva. Săad±riăm -/₃ <■ ²/₃ e?te uşor, pentru că r.urmtorlt sunt la fel Adunam, pui şt simplu, cei doi număiitad şi obţinem V3, sau L Dar cum pulem să adunăm două treimi din tori r.i patru cincimi din tari? Cum putem sa ne dăm seama cât face % + ⁴/s? Ar fi simplu dacă am putea spune ci V3 + Vj = ²'⁴/a 15 = % insă, din păcate, nu putem.

Pentru adunarea fracţiilor este nevoie de □ abordare diferită. Ca să adunăm Vş cu % trebuie mai Întâi şi le expnmăm sub forma unor fracţii care au numitor comun. M.z intâi înmulţim partea de sus ţi cea de Joi dlr, cu ? ca să obţinem ᵘAs. Acum să muldplldm partea de sus şi cea de Jos dm ⁴·'s cu 3 ca să obţinem ᵘ/u. Acum ambele

1202

Leonardod 'i Pisj (itwnaci j
îte™ |:i .■ /UH/A ■H'.I'M:., I.r.1
|:uri.t 1 ftKWtor.

Tt’drTule-.

1585

şiri'ii>'i
puneia
:i ţi'::rlf н
ftRCţiilflr

1700

liniafiacţ e:(-l intra m urii, general |ca 'n

fracţii au 15 ca numitor comun şi ca tai le adunăm tiehuie doar să adunăm umtaftadii

2 4 10 12 22
"■H"⁻ M —! ■j" — ÚI ""
3 5 15 15 15

CONVERTIREA LA ZECIMALE

în Lunea ţtlinţei fi în cele mil rmílte aplicaţii ale matematicii zedinatete sunt modajitateu piei trată de exprimare a fcacliiloi. Fracţia Vţ este aceiaşi Lucru cu fracţia ª/io .care are ir.iir.itc-rul 10 jl pe cate o putem scrie Hib fonni zeclmald ca Cţs.

Fracţiile care au numitorul S sau 1Ú sunt upar de tcansfurmat. Dar cum poate fi transformat 7fl, de exemplu, în formă zecimală? Tot ceea ce trebuie să ştim este că, utuncE când impârţim ur. număr întreg la un altul. fie se împarte exact, fie rămâne o anume cantitate pe cace o numim ,resl'.

Eămjnând la exemplul nostru cu Va, transformarea FiacţiiloE ordinase în fracţii zecimale se face astfel:

* încercaţi şi im.pirtjţj 7 la g. Nu merge sau aţi putea spune ci merge de a ort cu rest 7. Consemnăm aceasta scriind ii urmat de virgula ce piecedc Etcimalele: „O.".

t Acum împărţirii la d numărul 70 [restul din etapa pvţcedentâ, multiplicat ot 1D). Merge de Boii, pentru cl B- E – 64. aşadar lispuMulnte B cu restul E [70- Mk Aşac-i »nemţi asta tn completarea IH uitatului de la primul pas, obţinând

„ Acum Impârţlm la d numărul 60 [iestul din etapa precedenta, multiplicat cu 10) Pentru ci 7 x 3 ■ 56, râspunsui este 7 cu restul < Consemnăm şi aceasta ţi avem pănă acum jQţÎ^.

■ inipirţLm la B numirii 40 (restul din etapa precedentă multiplicai ou 10). Răspunsul este exjct 5, cu resl zero. Când obţinem resl ui 0, procedura s a terminat. Gala, kispunsul final cste"U/B7ti".

Dacă aplicăm această reţetă de transformare La alte fracţîi,este posibil să nu putem termina niciodată! O pulem ţine aţa La nesfârşit-dacă încercăm să transformăm Vj În formă zecimală, descoperim cA în fiecare etapă avem de impâiţlt 20 la 3 ţi obţinem rezultatul 6, cu test 2. Asa că iarăşi avem de im pârlii 6 La 20 jl nu ajungem r.Ldüdata în ieri punct În care restul este 0. în acest caz, avem numărul periodic simplu £'..666666.. Acesta ĸ scrie <M6[i pentru a Indica aecunala care se repeta.

Există multe fracţii cate ne pot duce la nesfârşit Ln astfel de calcule. L'n caz interesant este fracţia W În acest caz, avem '/? – &,714ÎB5?142659142B5.. şi

vedem că secvenţa 7142É5 este cea cate se repetă, bacă o fracţie ne conduce Sa

ci astfel de secvenţă care setat repetă ţi nu putem să □ scriem lUd udaţi informă zecimală finită, intri în funcţiune noi aj ia cu ʳpericwdă'.În cazul lui V?, scriem

FRACŢIILE EGIPTENE

Egiptenii din mileniul :il [Mea ilir.işi bazau sistemul de fracţii pe hierogbfe rare desemnau unităţile fracţionare – adică fracţiile cu numărător 1. Ştim asta dir. Papirusul thlnd, care este păstrat la British Museum Era un sistem de fracţii atât de complicat încât numai cel instruiţiin folosirea Iul ii puteau cunoaşte secretele şi puteau face calcule corecte.

Egiptenii fdloBeau câteva fracţii pnvileglHte, cum ai fi Vs, dar toate celelalte fracţii erau »primate în termeni de unităţi fracţionare ca Vj, Vj, Vn sau „/ita. Acestea erau pentru ci fracţiile „fundamentale”, cu ajutorul dsoiB se puteau exprima ţoale celelalte fracţii De exemplu, V? nu este o unit ale fracţionări, dar pOMtfl exprimată cu ajutor ui unităţilor fracţionare unde sunt folosite diferite unităţi fracţionare O caracteristică *a* sistemului

J Itlţ

5 111

168

ʳrar epplene

este că ar putea exista mai multe moduri ¿r a scrie o fracţie, iar unele variante sunt mai scurte decât altele, De exemplu,

-----f— f —
2 7 14

Poate ci /tescampmwiea egipteană” nit aie prea mate utilitate practică, dm sistemul o inspirat generaţii de cercetători ai matematicii pure şl ȷ oferit numeroase provocări, dintre care unele sunt nerezolvate şi astăzi De exemplu, nu s a găsit încă un matematician îndrăzneţ care să pună lu punct uri algoritm, pentru găsire ȷ celei mai scurte descompuneri în fracţu egiptene.

Idee de bază
un număr supra alt număr

04 Pătrat şi rădăcini pătrate

Daca vă pFace să desenaţi pătrata din punctuleţi. modelelE dumneavoastră de gândire strrrt similare celor ale pitagoreici Ier, Această activitate Ort taarle preţuită în comunitatea adepţilar hii Pitagura, un matematician cunoscut mai ales pentru teorema cart îi poarta rwsk Pita g ora S-a născut pe insuta grecească Samo5r iar societatea hú religioasă secretă a înflorit în sudul Itallal Pitagoreicii considerau că matematica este cheia naturii universului.

Dui numaiâjr.pujictEJe.olMtnăm că primul L.pâtratu±r, stânga este format dinţi-un singur punct. Pentru pilagorelcl, 1 era cei mai Impcrlunt număr, îmbibat de viată spirituală. începem bine, aţsdai. Contiruiând să nintiărâm punctele ce fanneaiă păirate LE următoare, obţinem numerele „pătrate* 1, *i,* y, 16, 23, S6, 45, M. _ Acestea se numesc pătrate .perfecte”. Poţi calcula un număr pătrat adunând punctele liu pe forma | extenuată precedentului, de exemplu 5+7-16. ■. 4 ■ a Pitagoreicii nu s-au oprit La pătrate, ti au studiai 5: alte » *

• • • ■ faime, rum BJ fi tnur.ghiiirllE, pentagoarie]e(iiguiacuclii<:L

■ * * • * ’ laturi) şlaltE faime jxjil&mile (cu mai multe tatun).

’ 1 * Numerele triunghiului!« seamănă cu u grămadă de pietre.

Cl Ifi

Dacă numărăm aceste puncte, uh'inem 1,1 li, 1Ú, 13, 21, 2Í. 36, ..

Dacă viei să calculezi un număr triunghiular. il poţi EDIDJJ pe precedentul.

* la care aduni numărul de puncte de pe

■ * * ultimul rând. De exemplu, caie erte numărul

■ ■ * * *

triunghiular care vine după ÍŰÍ' Acesta va avea 3 puncte pe ultimul rând, apa că adunăm. 10 4 5-13.

Dacă veji cumpără numerele pătrate ţi cele triunghiulare, veţi observa că numărul 36

I,_J 11J I

1750 Wr.
Bablienicnd aicnulau
Utalt de fHIcInf r«i <ift

525 î.Br.
Pii^c+űlü+dudiJiL
MjmWk pMriti
aran>1e pomet rit

cca 300 i.Hr.
,'Mf¡1 IWRIftltot Irfttofttifi M
Éirigitus «M NKIU 1H
iZartc-a S J FlţowaMar IulF ULIICI

apaié în ambele liste. Dat eústá o legătură ;i nui ulmiloare. Deca luiţi numere iriuivghiulara succesive şl le adunaţi două câte două. ce obţineţi7 Şi încercăm şi să punem rezultatele inir un tabel.

Aj-s estei Daci adu tu dcuâ numere triunghiulare succesive, ubţii un număr pătrat Există o dovada ŞL mai vizibilă, I i propriu. Xi luăm un pătrat formal dm 4 şiruri de câte 4 puncte şl să trasăm prin el o diagonală. Punctele de deasupra lirued formează un număr triunghiului, iar sub ktue se află următorul număr triunghiular. Aceartâ observaţie este valabilă pentru pătrate de orice mărime. De la aceste .diagrame în puncte“ páni la misuiaiea suprafeţelor este un pas foarte mic. Suprafaţa tinin păliat de laturi Í este 4 w4 ■ 4’ ■ 16 unităţi de sujuafaţi. în geneial, iacá notiiir. lattn a cu x. atunci suptafaţa va n x^1.

Pătratul iri stila baza Formei parabolice. Aceasta este forma pe care 0 ginii !u antenele de ratelit sau la oglinzile reflectorizante de la fururile maşinilor. Parabola are un focar. La antena de salelit, un senior plasat în focar captează semnalul reflectai alunei când, rarele paralele venite din spaţiu lovesc suprafaţa curbată şi sur.t dbecţlonafe spre punctul defocalizaie.

La farul de maşină, becul amplasat în focar trimite un fascicul paralel de lumină, în epeit, anmdftarti de greutăţi, de suJtţâ sau de CKxan vor lecuiuraşte cu toţii în parabolă forma traiectoriei curbate pe care toate obiectele o urmează i n căderea lor către pământ.

RĂDĂCIMl PĂiRAIE

Dacă inversăm problema şl vrem sa aflăm lungimea laturii unui pătrat care are suprafaţa dată 1G. răspunsul este evident 4 Rădăcina pătrata a lui 16 este 4 şi H Scrie X'T6 * 4 îini.bolkij /pMrtfU ridiClnite pălrâte âe fdOMfte din WOhl| al XVI leu. Toate numerele piliale au, cu rădăcini pătrate, numere întregi. De BMlnplU. uT – 1, V3 ■ *2,* V? * 3,VI6 ■ *t,* '■ 5 ş.i.rtl.d. Sun[1]! lOlUŞi multe goluri în şirul numerelor naturale, intre aceste pătrate perfecte. Vorbim despre 2, 3, S, 6,7.8,1D, 11...

3 3 5 6 7 8 1Ű JT *>2 13* rJ

1 **4** 9

Există o notutie alternativă foarte sugestivă pentru rădăcinile pătrate. Daci >:2 indică un număr pătrat, putem scrie rădăcina pătrată a acestui număr sub